Correction ES Amérique du Nord 3 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. $f'(0)$ est égal à 2 **Réponse B**
2. $f'(x)$ est positif sur l'intervalle $]-2\ ;\ 2[$ **Réponse C**
3. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point D est $y = -2x + 11$ **Réponse A**
4. Une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[-2\ ;\ 11]$ est strictement croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ 7,5]$ car f qui est sa dérivée est positive sur cet intervalle. **Réponse B**
5. L'équation $\exp[f(x)] = 1$ équivaut à $f(x) = 0$, elle admet deux solutions. **Réponse A**

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

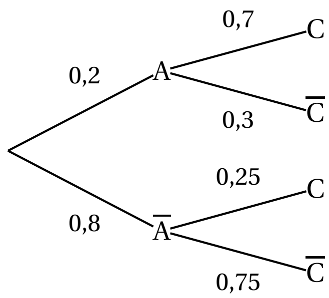
1. **a.** D'après l'énoncé $\boxed{p(\text{A}) = 0,2}$ et $\boxed{p(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{C}}) = 0,6}$

   b. On cherche la probabilité de $\overline{\text{C}}$ sachant $\overline{\text{A}}$:

$$p_{\overline{\text{A}}}(\overline{\text{C}}) = \frac{p(\overline{\text{A}} \cap \overline{\text{C}})}{p(\overline{\text{A}})} = \frac{0,6}{0,8} = 0,75$$

   Si un client n'achète pas l'appareil photo en promotion, la probabilité qu'il n'achète pas non plus la carte mémoire en promotion est de 0,75.

2. *Arbre*



3. D'après la formule des probabilités totates on a :

$$\begin{aligned} p(\text{C}) &= p(\text{A} \cap \text{C}) + p(\overline{\text{A}} \cap \text{C}) \\ &= p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{C}) + p(\overline{\text{A}}) \times p_{\overline{\text{A}}}(\text{C}) \\ &= 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,25 \\ &= 0,34 \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{La probabilité que le client achète la carte mémoire est de 0,34}}$

4. On cherche la probabilité de A sachant C :

$$p_{\text{C}}(\text{A}) = \frac{p(\text{A} \cap \text{C})}{p(\text{C})} = \frac{0,2 \times 0,7}{0,34} = \frac{7}{17} \approx 0,412$$

   Si un client achète la carte mémoire, la probabilité qu'il achète l'appareil photo est de 0,75.

5. **a.** *Loi de probabilité*

Bénéfice par client en euros	0	4	30	34
Probabilité d'atteindre le bénéfice	0,6	0,2	0,06	0,14

   b. L'espérance vaut : $E = 0 \times 0,6 + 4 \times 0,2 + 30 \times 0,06 + 34 \times 0,14 = 7,36$.

   $\boxed{\text{Pour 100 clients entrant dans son magasin, le commerçant peut espérer un gain de 736 €.}}$

6. L'évènement contraire de «au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion» est «les trois clients achète l'appareil photo en promotion» donc

$$p = 1 - 0,2^3 = 0,992$$

La probabilité qu'au moins un de ces trois clients n'achète pas l'appareil photo en promotion est de 0,992.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Étude préliminaire

1. On a :

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 0 \\ 1 - 2\ln(\alpha) &= 0 \\ \ln(\alpha) &= \tfrac{1}{2} \\ \alpha &= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \\ \alpha &= \sqrt{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

2. Comme la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et s'annule en α :

- $g(x)$ est positif sur $]0\,;\,\alpha[$ et
- $g(x)$ est négatif sur $]\alpha\,;\,+\infty[$

Partie B - Étude d'une fonction

1. On a $f(x) = 2\dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{1}{x}$ or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

Donc $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

On admettra que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

2. **a.** f est un quotient de fonctions dérivables, elle est donc dérivable et pour tout réel $x \in]0\,;\,+\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2}{x} \times x - (2\ln(x) + 1) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2 - 2\ln(x) - 1}{x^2} \\ &= \frac{1 - 2\ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

b. $f'(x)$ est du même signe que $g(x)$ car un carré est toujours positif, on a donc le tableau de variation suivant :

x	0		α		20
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

3. **a.** On remarque que $f(x) = 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) + \dfrac{1}{x}$,

c'est à dire $f(x) = 2u'(x)u(x) + \frac{1}{x}$ avec $u(x) = \ln(x)$. On en déduit que

$$F(x) = (u(x))^2 + \ln(x) = (\ln(x))^2 + \ln(x)$$

b. On a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{4}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\Big[(\ln(x))^2 + \ln(x)\Big]_1^5 \\ &= \frac{1}{4}\Big(\big((\ln 5)^2 + \ln 5\big) - \big((\ln 1)^2 + \ln 1\big)\Big) \\ &= \frac{(\ln 5)^2 + \ln 5}{4} \end{aligned}$$

On a donc $\boxed{I = \dfrac{(\ln 5)^2 + \ln 5}{4} \approx 1,05}$

Partie C - Application économique

1. La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est la valeur moyenne de la fonction f entre 1 et 5
c'est à dire $\dfrac{1}{5-1}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 1,05$
La valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1 000 et 5 000 pièces est donc de 1,05 €.
2. On doit résoudre l'équation $f(x) = 1,05$, or on ne peut pas la résoudre de façon exacte. Sur $[1\ ;\ 5]$ on a le tableau de variation suivant :

x	1		α		5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$f(5)$

Or $f(1) = 1$, $f(\alpha) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 1,21$ et $f(5) = \dfrac{2\ln 5 + 1}{5} \approx 0,84$.
En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires on montre que cette équation a deux solutions : une sur l'intervalle $]1\ ;\ \alpha[$ et une autre sur l'intervalle $]\alpha\ ;\ 5[$.
Puis en utilisant la méthode de balayage sur la calculatrice on trouve que les solutions sont approximativement :

$$1,05 < x_1 < 1,06 \qquad \text{et} \qquad 3,11 < x_2 < 3,12$$

Il faut donc produire 105 pièces ou 311 pièces pour avoir un bénéfice unitaire égal à 1,05 €.

EXERCICE 4 **5 points**

Candidat n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. *Voir graphique en fin d'exercice*
Un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé car les points ne sont proche d'une droite.
2. Pour effectuer un ajustement exponentiel, on décide de considérer les $z_i = \ln\left(y_i\right)$.

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln\left(y_i\right)$	6,29	6,58	6,89	7,19	7,50	7,79	8,10

3. L'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés est

$$\boxed{z = 0,3x + 6}$$

On a donc
$$\begin{aligned} \ln(y) &= 0,3x + 6 \\ y &= \mathrm{e}^{0,3x+6} \end{aligned}$$

4. **a.** On a $y(10) = \mathrm{e}^9 \approx 8103$
On peut estimer à 8103 du nombre de consultations à la 10e semaine.
b. On doit résoudre l'inéquation :

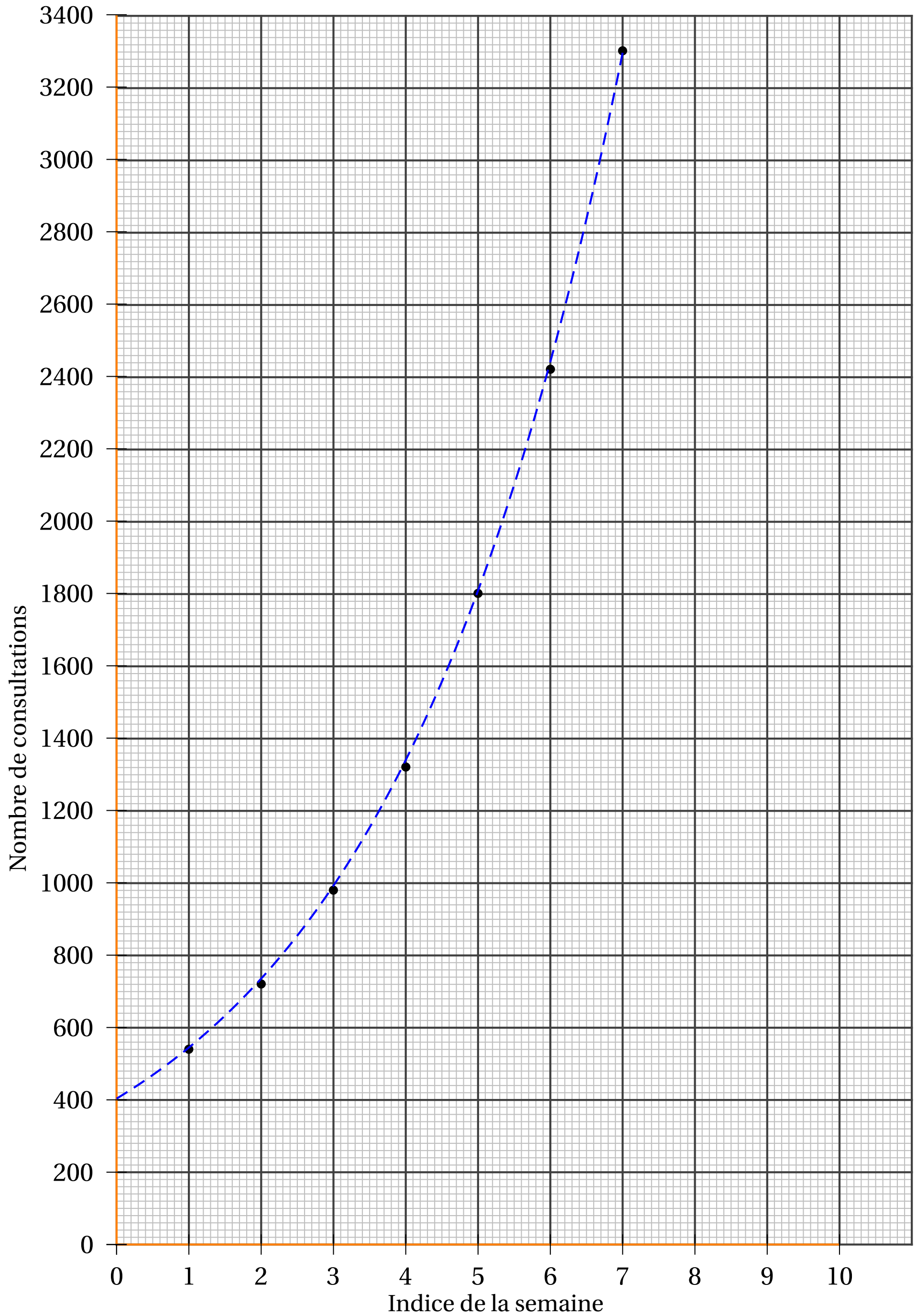
$$\begin{aligned} y(x) &\geqslant \frac{500000}{4} \\ \mathrm{e}^{0,3x+6} &\geqslant 12500 \\ 0,3x + 6 &\geqslant \ln 12500 \\ 0,3x &\geqslant \ln 12500 - 6 \\ x &\geqslant \frac{\ln 12500 - 6}{0,3} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln 12500 - 6}{0,3} \approx 11,4$

Donc $\boxed{\text{la 12}^{\text{e}} \text{ semaine le nombre de consultations dépassera le quart de la population.}}$

5. En observant les valeurs données par le modèle exponentiel grâce à un tableau obtenu à l'aide d'une calculatrice, on peut remarquer que $y(17) \approx 66171$ donc que suivant ce modèle le nombre de consultations dépasse la population totale au bout de 17 semaine, ce qui n'est pas possible, donc le modèle n'est plus valable sur le long terme.

Graphique



Corrigé de Paul Duprat